## Тема 6. Частотные характеристики, расширенные характеристики

### Частотные характеристики

Наряду с методом временных характеристик в теории автоматического регулирования широко используется метод частотных характеристик, которые определяют поведение системы при действии на ее входе гармонических колебаний.

Если на вход линейной системы подавать гармонические, например синусоидальные колебания

$$x(t)=A_{вх}\sin(\omega\cdot t+\varphi_{вх})$$

или в комплексной показательной форме

$$x(t)=A_{вх}\exp[j\cdot(\omega\cdot t+\varphi_{вх})],$$

где $A_{вх}$, $\omega$, $\varphi_{вх}$ – соответственно, амплитуда, частота и фаза входных колебаний, то после окончания переходного процесса на выходе системы установятся гармонические колебания выходной величины той же частоты, но с другой амплитудой и фазой.

$$y(t)=A_{вых}\sin(\omega\cdot t+\varphi_{вых}),$$

или

$$y(t)=A_{вых}\exp[j\cdot(\omega\cdot t+\varphi_{вых})].$$

Отношение значений выходной величины системы к значениям входной, выраженное в комплексной форме, называют амплитудно-фазовой частотной характеристикой системы (АФХ) и обозначают $W(j\omega)$.

$$W(j\omega)=\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{A_{шыг}}{A_{кір}}e^{j(\varphi_{шыг}-\varphi_{кір})}. \tag{6.1}$$

Отсюда следуют две другие важнейшие характеристики.

Зависимость отношения амплитуд выходных и входных колебаний от частоты называют амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) и обозначают $A(\omega)$.

$$A(\omega)=\frac{A_{вых}(\omega)}{A_{вх}(\omega)}. \tag{6.2}$$

Зависимость разности фаз выходных и входных колебаний от частоты называют фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) и обозначают $\varphi(\omega)$.

$$\varphi(\omega) = \varphi_{вых}(\omega) - \varphi_{вх}(\omega). \tag{6.3}$$

Тогда выражение для АФХ можно записать в следующем виде

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \tag{6.4}$$

Любую комплексную функцию можно представить в виде суммы вещественной $P(\omega)$ и мнимой $Q(\omega)$ составляющих и уравнение (6.4) записать следующим образом:

$$W(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega). \tag{6.5}$$

В свою очередь, зависимость вещественной части $P(\omega)=A(\omega)\cos\varphi(\omega)$ от частоты называют вещественной частотной характеристикой, а выражение $Q(\omega)=A(\omega)\sin\varphi(\omega)$ – мнимой частотной характеристикой.

На комплексной плоскости величина $A(\omega_1)e^{j\varphi(\omega1)}$ изображается вектором (рисунок 6.1), длина которого равна $A(\omega_1)$ и который расположен под углом $\varphi(\omega_1)$ относительно вещественной оси. Соответственно АФХ представляется на комплексной плоскости кривой, которую очерчивает конец вектора А(ω) при изменении частоты от нуля до бесконечности.

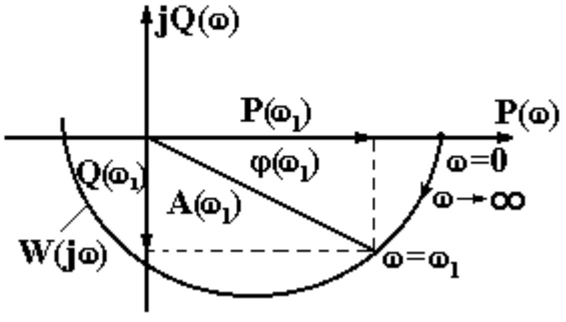


Рисунок 6.1

Из рисунка 6.1 следует

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{Q(\omega)}{P(\omega)};$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}.$$

Из (6.1) следует, что АФХ можно определить из передаточной функции заменой оператора $p$ на $j\omega$.

Рассмотрим в качестве примера частотные характеристики резервуара со свободным стоком, передаточная функция которого

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}.$$

Заменяя $p$ на $j\omega$, получим $W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$. Избавляясь от комплексности в знаменателе, получим

$$W(j\omega) = \frac{k(1 - j\omega T)}{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)} = \frac{k - jk\omega T}{1 + (\omega T)^2} =$$

$$= \frac{k}{1 + (\omega T)^2} - j\frac{k\omega T}{1 + (\omega T)^2} = P(\omega) - jQ(\omega).$$

Отсюда находим

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\frac{k^2}{[1 + (\omega T)^2]^2} + \frac{k^2(\omega T)^2}{[1 + (\omega T)^2]^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{k^2[1 + (\omega T)^2]}{[1 + (\omega T)^2]^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}};$$

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -arctg(\omega T).$$

Придавая частоте ω ряд значений от нуля до бесконечности, вычисляем значения $P(\omega)$, $Q(\omega)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ и строим графики частотных характеристик, показанные на рисунке 6.2.

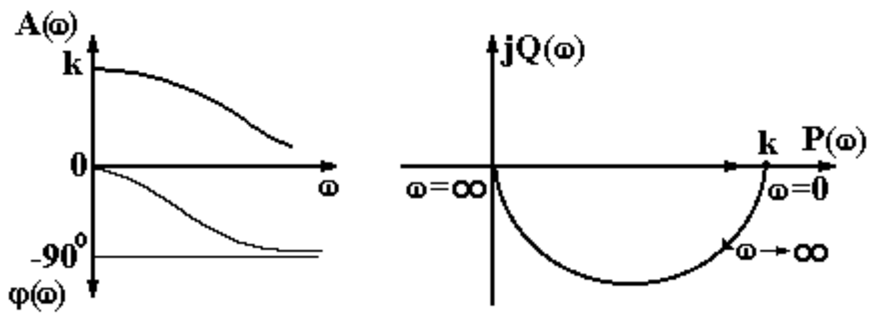


Рисунок 6.2

## Расширенные частотные характеристики

Для практических расчетов, в частности, для определения оптимальных настроечных параметров регулятора, обеспечивающих заданную степень устойчивости САР, необходимо иметь так называемые расширенные частотные характеристики объекта и регулятора, которые обозначают как $W(m, j\omega)$.

Расширенная АФХ находится из передаточной функции заменой оператора $p$ на $(j\text{-}m)\cdot\omega$, где $m$ – степень колебательности системы.

Степень колебательности системы определяется как отношение вещественной составляющей корней характеристического уравнения системы $\alpha$ к коэффициенту при мнимой составляющей $\omega$, т.е. если корни определяются выражением $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$, то $m=\alpha/\omega$.

## Логарифмические частотные характеристики

Для практических расчетов наряду с обычными используются также логарифмические частотные характеристики.

Логарифмируя выражение (6.1) для АФХ, получим

$$\lg W(j\omega)=\lg A(\omega)+j\varphi(\omega)\lg e.$$

Функцию $L(\omega)=20\lg A(\omega)$ называют логарифмической амплитудно-частотной функцией. График зависимости $L(\omega)$ от логарифма частоты называют логарифмической амплитудно-частотной характеристикой (ЛАЧХ).

За единицу частоты принимается логарифмическая единица декада, соответствующая десятикратному изменению частоты.

Логарифмической фазо-частотной характеристикой (ЛФЧХ) называют фазо-частотную характеристику $\varphi(\omega)$, построенную в логарифмическом масштабе частот.

Для примера найдем логарифмические частотные характеристики резервуара со свободным стоком, АФХ которого представляется уравнением

$$W(j\omega)=\frac{k}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}e^{-jarctg(\omega T)}.$$

ЛАЧХ определяется выражением

$$L(\omega)=20\lg k-20\lg\sqrt{1+(T\omega)^2}.$$

ЛАЧХ строят в виде ломаных линий (рисунок 6.3) из прямолинейных отрезков следующим образом:

при $T\omega \le 1$ пренебрегают величиной $(T\omega)^2$ по сравнению с единицей и считают, что

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1+(T\omega)^2} = 20\lg k;$$

до значения частоты $\omega_a = 1/T$;

при $T\omega \ge 1$ пренебрегают единицей по сравнению с $(T\omega)^2$ и считают, что

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg(T\omega).$$

при частотах свыше $\omega_a = 1/T$.

Частоту $\omega_a = 1/T$ называют сопрягающей частотой. Для построения ЛАЧХ необходимо определить как будет изменяться ее наклон при изменении частоты на одну декаду. Для этого найдем разность

$$L(10\omega) - L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{(10T\omega)^2} - 20\lg k + 20\lg\sqrt{(T\omega)^2} =$$

$$= 20\lg(10T\omega) + 20\lg(T\omega) = -20\lg 10 - 20\lg(T\omega) + 20\lg(T\omega) = -20 \text{ дБ/дек.}$$

График характеристики строят в координатах $L(\omega)$,дБ$-\omega$, в логарифмическом масштабе. Ось ординат при построении логарифмических характеристик проводят через произвольную точку, но не через точку $\omega=0$, поскольку частоте $\omega=0$ соответствует бесконечно удаленная точка: $\lg\omega \to -\infty$ при $\omega \to 0$. Логарифмические частотные характеристики резервуара с выходным насосом при $T$=1с, $\omega_a$=1с$^{-1}$ и $k$=10 показаны на рисунке 6.3. Частоту $\omega_c$, при которой график $L(\omega)$ пересекает ось частот, называют частотой среза.

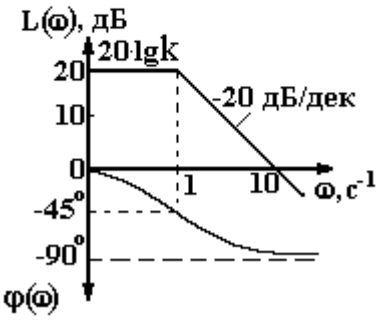


Рисунок 6.3

Логарифмическая фазо-частотная характеристика резервуара описывается формулой

$$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega T).$$

При T=1с

$$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\,\omega$$

и строится в координатах $\varphi(\omega)$, градусов$-\omega$, в логарифмическом масштабе частот (рисунок 6.3).